

- (358) D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2025). *Reflexiones Histórico Epistemológicas sobre las Cantidades No Arquimedianas*. Paradigma, XLVI, 2.
https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma?fbclid=IwY2xjawLnOI5leHRuA2FlbQIxMQABHsmT3ej8GCJ1PAbJXC6nWd3fWV5WjZwqW23Y8C82vzbXpWv0hZHnSm0IIGKO_aem_zjrludDtTYBHXyIgsD08ZA&sfnsn=scwspwa

Reflexiones Histórico Epistemológicas sobre las Cantidades No Arquimedianas

Bruno D'Amore

<https://orcid.org/0000-0002-5834-9438>

Ph.D. in Mathematics Education University of Nitra (Slovakia)

Ph.D. Honoris Causa University of Cyprus

Member of the Academy of Sciences of Bologna

NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

bruno.damore@unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla

<https://orcid.org/0000-0002-1592-9918>

Ph.D. in Mathematics Education University of Nitra (Slovakia)

NRD, Departamento de Matematica, Universidad de Bologna, Italia

marisafp@hotmail.it

Resumen

La experiencia de los autores, investigadores en el campo de la Educación Matemática, profesores universitarios, y formadores de profesores de Matemática en todos los niveles escolares, ha mostrado que la fuente cultural que estos profesores tienen, se basa a veces en un conocimiento técnico, pero no epistemológicamente crítico. Ello los lleva a no tomar en consideración las dificultades que los seres humanos tenemos para construir cognitiva y críticamente los conocimientos matemáticos; tales dificultades se proyectan hacia los estudiantes, quienes enfrentan obstáculos para apropiarse idiosincrásicamente de tales conocimientos; entre esos obstáculos están: las explicaciones del profesor en el aula y las tareas que individualmente deben realizar que, muchas veces, constan sólo de ejercicios de utilización de rutinas de cálculo estandarizadas. En este artículo se reporta un breve estudio histórico y epistemológico, no didáctico, sobre las llamadas “*Cantidades no arquimedianas*”, es decir aquellas entidades que no responden al postulado de Eudoxo-Arquímedes; se trata de un tema aparentemente sencillo, pero culturalmente profundo, que no es tratado explícitamente en las clases de Matemática, pero que está presente, aunque implícitamente, en casi toda la Matemática, especialmente en Geometría y Análisis. El propósito del ensayo es mostrar cómo una definición que parece general, es decir, aplicable a todas las cantidades, no lo es en absoluto. La sorpresa expresada por un estudiante de secundaria ante el descubrimiento de magnitudes no arquimedianas (y que nos contó su profesor), nos impulsó a escribir este texto que, esperamos, pueda contribuir a crear una

conciencia histórico-epistemológico-didáctica en los docentes que enseñan Matemática, tanto en instituciones universitarias como no universitarias.

Palabras clave: Historia de la Matemática, Formación de Profesores, Ángulo de Contingencia, Obstáculo Epistemológico, Postulado de Eudoxo-Arquímedes, Proclo Lício (412-485).

Historical and Epistemological Reflections on Non-Archimedean Quantities

Abstract

The experience of authors, researchers in the field of Mathematics Education, university teachers, and trainers of Mathematics teachers at all school levels has shown them that the cultural source which these teachers have, is based on technical knowledge, but not epistemologically critical. This leads them not to take into account the difficulties that human beings have in cognitively and critically building up mathematical knowledge; such difficulties are projected towards students, those who face obstacles to the idiosyncratic appropriation of such knowledge; among these obstacles are: the teacher's explanations in the classroom and the tasks that they must individually perform which often consist only of exercises using standardized calculation routines. This article reports a brief historical and epistemological study, not didactic, on the so-called "non-Archimedean quantities", that is to say those entities which do not respond to the postulate of Eudoxus-Archimedes; it is a simple subject, but culturally deep, which is not explicitly covered in Mathematics classes, but which is present, albeit implicitly, in almost all of Mathematics, especially in Geometry and Analysis. The purpose of the essay is to show how a definition which seems general, that is, applicable to all quantities, is not at all; the surprise expressed by a secondary student at the discovery of non-Archimedean magnitudes (and told us by his teacher), prompted us to write this text which, we hope, can contribute to create a historical-epistemological-didactic awareness in teachers who teach Mathematics, both in university and non-university institutions.

Keywords: History of Mathematics, Teacher Training, Contingency Angle, Epistemological Obstacle, Postulate of Eudoxus-Archimedes, Proclus Lycius (412 – 485).

Reflexões Epistemológicas Históricas sobre as Quantidades Não-Arquimedianas

Resumo

A experiência dos autores, pesquisadores no campo da Educação Matemática, professores universitários e formadores de professores de Matemática em todos os níveis escolares, mostrou-lhes que a fonte cultural que estes professores têm, é baseada em um conhecimento técnico, mas não epistemologicamente crítico. Isso os conduz a não levar em consideração as dificuldades que os seres humanos, em geral, temos para construir cognitivamente e criticamente conhecimentos matemáticos; tais dificuldades são projetadas para os estudantes, que enfrentam obstáculos para apropriar-se idiosincrasticamente de tais conhecimentos; entre esses obstáculos estão: as explicações do professor na sala de aula e as tarefas que individualmente devem realizar que, muitas vezes, consistem apenas de exercícios de utilização de rotinas de cálculo padronizadas. Neste artigo se relata um breve estudo histórico e epistemológico, não didático, sobre as chamadas "*Quantidades não-arquimedes*", ou seja aquelas entidades que não respondem ao *Postulado de Eudoxo-Arquímedes*; trata-se de um tema simples, mas culturalmente profundo, que não é tratado explicitamente nas aulas de Matemática, mas que está presente, embora implicitamente, em quase toda a Matemática, especialmente em Geometria e Análise. O objetivo do ensaio é

mostrar como una definición que parece general, ou seja, que é aplicável a todas as quantidades, não é em absoluto; a surpresa expressa por um estudante do ensino médio diante da descoberta de magnitudes não-arquimedeanas (e que nos contou seu professor), nos impulsionou a escrever este texto que, esperamos, possa contribuir para criar uma consciência histórico-epistemológico-didática nos professores que ensinam Matemática, tanto em instituições universitárias quanto não universitárias.

Palavras-chave: História da Matemática, Formação de Professores, Ângulo de Contingência, Obstáculo Epistemológico, Postulado de Eudoxo-Arquimedes, Proclo Lício (412 – 485)

Introducción.

La bibliografía en la que se proponen y desarrollan reflexiones histórico-críticas y didácticas sobre algunos temas y conceptos en las más diversas áreas de la Matemática, es amplia y abundante. Como muestra, pueden señalarse los trabajos de Barbin (1997); Fandiño Pinilla y D'Amore (2009; 2019; 2023); D'Amore y Fandiño Pinilla (2012; 2019); Chorlay et al. (2022); Furinghetti y Somaglia (1998); Nataraj y Thomas (2009); Radford y Santi (2022) y Sfard (2015). En esa literatura son tratados no solo temas de Matemática superior, la que se estudia en las universidades, sino que incluye también reflexiones sobre temas elementales, tales como la creación de sistemas básicos para los números naturales, o la polémica implicada por la pertenencia o del número cero al conjunto $\mathbb{N}$, entre otros.

En este artículo se reporta un breve estudio histórico y epistemológico, no didáctico, sobre las llamadas “*Cantidades no arquimedianas*”, es decir aquellas entidades que no responden al postulado de Eudoxo-Arquimedes; se trata de un tema sencillo, pero culturalmente profundo, que no es tratado explícitamente en las clases de Matemática, pero que está presente, aunque implícitamente, en casi toda la Matemática, especialmente en Geometría y Análisis. El propósito del ensayo es mostrar cómo una definición que parece general, es decir, aplicable a todas las cantidades, no lo es en absoluto; la sorpresa expresada por un estudiante de secundaria ante el descubrimiento de magnitudes no arquimedianas (y que nos contó su profesor), nos impulsó a escribir este texto que, esperamos, pueda contribuir a crear una conciencia histórico-epistemológico-didáctica en los docentes que enseñan Matemática, tanto en instituciones universitarias como no universitarias.

Las magnitudes no arquimedianas en la antigüedad. La problemática del ángulo de contingencia.

Enunciaremos el llamado *Postulado de Eudoxo-Arquimedes*, refiriendo el texto original del enunciado, tal como lo propuso el propio Arquimedes (-287 – -212)¹:

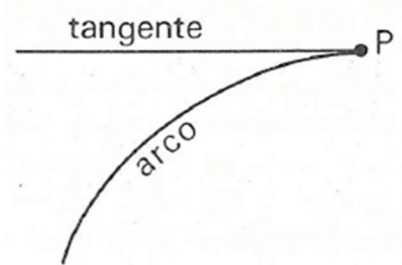
«Dadas dos cantidades diferentes, existe un múltiplo de la menor que es mayor que la mayor, y existe un submúltiplo de la mayor que es menor que la menor».

La cuestión de las magnitudes no arquimedianas, es decir, de las clases de magnitudes que no satisfacen el postulado de Eudoxo-Arquimedes, parte necesariamente de una referencia que Demócrito (-460 – -350 aprox.) hace respecto a las discusiones que tuvieron lugar en su

¹ A lo largo de este texto presentaremos pasajes extraídos de las obras de los autores citados. En algunos casos, conservando íntegramente el sentido de las frases citadas, tendremos que permitirnos algunas libertades lingüísticas, adaptando el griego y el latín de las distintas épocas a las lenguas modernas, para no correr el riesgo de proponer frases sí más acordes con el texto original, pero a menudo casi incomprensibles hoy.

tiempo en torno al ángulo formado por un arco de círculo y su tangente en un punto (Figura 1)².

Figura 1: Ángulo de Contingencia³.

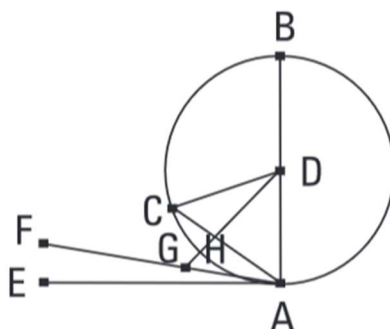


Fuente: Elaboración Propia.

En el Libro III de sus *Elementos*, Euclides (siglos -IV – -III), en la Proposición 16, trata de este ángulo (Figura 2):

«Si se traza una recta perpendicular en un extremo del diámetro de un círculo, ésta queda fuera del círculo y no se puede insertar ninguna otra recta entre ésta y la circunferencia».

Figura 2: Ángulo de Contingencia (Proposición XVI del Libro III de los *Elementos* de Euclides)⁴.



Fuente: Euclides (2009, p. 165).

La última parte de la Proposición XVI considera al Ángulo de Contingencia para afirmar que éste es menor que cualquier ángulo rectilíneo. De esto se deduce que no existe un múltiplo del ángulo de contingencia mayor que un ángulo rectilíneo; mejor aún: no hay submúltiplo de un ángulo rectilíneo dado, menor que el ángulo de contingencia. Por tanto, la clase formada por ángulos mixtilíneos y rectilíneos juntos no satisface el postulado de Eudoxo-Arquímedes que, en cambio, parece ser completamente general para cualquier conjunto de cantidades.

Sobre estas ideas, no es concebible una teoría de la relación entre ángulos rectilíneos y curvilíneos juntos; quizás precisamente por esta presencia “incómoda”, Euclides pretende

² En la antigüedad no se hacía diferencia entre ángulos formados por rectas y ángulos formados por curvas cualesquiera. Sobre la larga y compleja historia de la definición de ángulo, véase Fandiño Pinilla, D’Amore (2023).

³ La denominación es atribuida a Giordano Nemorario (siglos XIII – XIV) en el 1220.

⁴ Una demostración de la Proposición XVI, puede leerse en Euclides (2009, pp. 165-167).

eliminar de su exposición cualquier duda respecto de la propiedad de las parejas de magnitudes de “tener una razón entre sí”. Así se expresa, de hecho, la definición 4 del libro V de los *Elementos*:

«Se dice que dos magnitudes tienen una razón entre sí cuando una de estas, multiplicada por un número, puede exceder a la otra». (Euclides, 2009, p. 205).

Arquímedes impondrá restricciones similares para eliminar las cantidades (que hoy se llaman “no arquimedianas”) del campo de sus investigaciones sobre magnitudes, aunque no excluya la posibilidad de su existencia basándose en la Lógica.

Hasta entonces, los matemáticos habían aceptado los ángulos mixtilíneos con cierta facilidad. Sin embargo, Proclo (412 – 486) tiende a excluir los ángulos mixtilíneos de sus estudios; en general, él excluye definitivamente el ángulo de contingencia de la clase de los ángulos:

«Todas las medidas finitas de las magnitudes de la misma naturaleza tienen una razón entre sí; y, como el ángulo tiene una magnitud, los ángulos (del mismo tipo) también tendrán una razón entre ellos. Por este motivo, el ángulo entre un arco y su tangente en un extremo del diámetro también tiene una razón con el ángulo rectilíneo. Pero sabemos que las cosas que tienen una razón entre sí pueden, si se multiplican, superarse unas a otras. Por lo tanto, a veces el ángulo entre un arco y la tangente en un extremo del diámetro podría exceder el ángulo rectilíneo. Pero esto es imposible, ya que hemos demostrado que este ángulo es menor que cualquier ángulo rectilíneo» (Proclo, 1873).

Proclo, quizás, es quien, por primera vez en la Historia de la Matemática, relaciona explícitamente el problema del ángulo de contingencia con el postulado de Arquímedes; según Proclo, el ángulo de contingencia no es una magnitud arquimediana, sino que forma parte de un tipo especial de entidades que no responden al postulado de Eudoxo-Arquímedes y que por tanto podríamos finalmente llamar: “Magnitudes no Arquimedianas”.

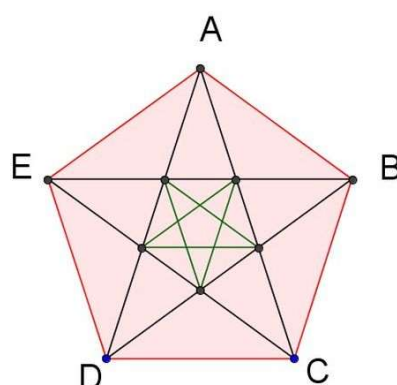
En la Edad Media.

Durante el siglo XIII, Giovanni Campano da Novara (1220 – 1296), que fue capellán del papa Urbano IV (1195 – 1264) (un francés de origen humilde que demostró ser un digno monarca y que además supo promover el estudio de las ciencias), tradujo los *Elementos* del árabe al latín (incluidos los libros XIV y XV, ya en un periodo en el cual estos dos capítulos no estaban atribuidos a Euclides por los críticos de la época), proporcionándoles comentarios muy ingeniosos y críticos⁵ (Busard, 2005). De hecho, sus notas a menudo van más allá de una simple traducción con comentarios, porque Campano inserta en ellas su propia investigación personal.

Entre todos los estudios, cabe recordar el del “pentágono estrellado” (que tanto éxito tendrá entre los pintores-matemáticos del Renacimiento) (Figura 3) y, precisamente, el del ángulo de contingencia (D’Amore, Sbaragli, 2018, 2019).

⁵ La obra aquí referida es: Euclid. *Elementa geometriae*. [Translated from the Arabic by Adelard of Bath (c. 1080 – c. 1152). Edited by Giovanni Campano da Novara (1220-96).]; la cual, ha sido examinada en: Busard, H. L. L. *Campanus of Novara and Euclid’s Elements*. 2 vols. Stuttgart, Germany: Steiner, 2005, que incluye una explicación detallada de las traducciones de los *Elementos* de Euclides, realizadas antes de la de Campano.

Figura 3. Pentágono Estrellado.



Fuente: Elaboración propia.

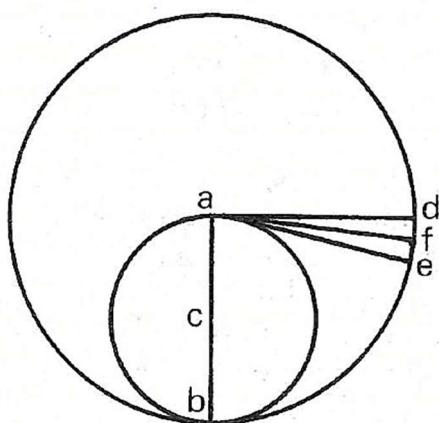
A este respecto, Campano da dos demostraciones en las que se pasa del ángulo de amplitud cero (entendido como el menor de los ángulos agudos) hasta al ángulo recto; pero, sin poder llegar a su objetivo, es decir, probar que el ángulo rectilíneo es igual al ángulo que forma el semicírculo con el diámetro (D'Amore, Sbaragli, 2018, 2019).

En su exposición, sin embargo, se plantea una cuestión mucho más moderna: las relaciones entre el Postulado de Eudoxo-Arquímedes y el Postulado de Continuidad (que sólo en el siglo XIX, se convertiría en un tema explícito de discusión matemática).

Relatamos el siguiente extracto, tomado de la obra de Giovanni Campano (Busard, H. L. L., 2005), es muy significativo:

«De las discusiones precedentes se desprende que el siguiente argumento no es válido: si una cantidad pasa de un valor menor a uno mayor a través de todos los estadios intermedios, entonces pasa también por el valor de la igualdad. Además, se puede demostrar que existe una cantidad que es mayor y al mismo tiempo menor que la misma cantidad. Pero entonces también es posible encontrarla igual». Pero podemos demostrar que este argumento no es válido.

Figura 4. Ángulos rectilíneos y de contingencia.



Fuente: Cardano, 1582; Busard, H. L. L., 2005.

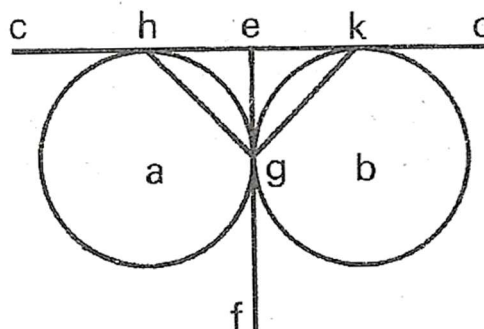
«Sea un círculo ab con centro c y diámetro acb . Trácese desde su extremo una recta perpendicular a ab . Esta recta ad será tangente al círculo. Dibujase de nuevo el círculo bed con centro a , radio ab e imagínase que la recta ab se mueva alrededor del punto a , a lo largo del arco circular bed , de modo que el punto b pasa por todos los puntos del arco bed , hasta cubrir el segmento ad . El ángulo bad es un ángulo recto y se puede demostrar que es mayor que cualquier ángulo que tenga como lados ab y un segmento que tenga un vértice en a y el otro en un punto del arco bd , excluyendo los dos extremos» (Cardano, 1582; Busard, H. L. L., 2005).

[Siguen dos demostraciones tomadas de la obra original de Campano. El lenguaje utilizado en las demostraciones es enormemente elaborado, aunque el sentido general del razonamiento es claro].

En este punto, Campano proporciona un método para dividir el ángulo de contingencia formado por el contacto de dos circunferencias (iguales), utilizando criterios de simetría. Así continúa:

«Se puede demostrar que el ángulo de contingencia formado por dos circunferencias tangentes (en la figura 5, las dos circunferencias con centros a y b y tangentes en g) es divisible por una línea recta, como la ge en la fig. 5. Es cierto que el ángulo formado por el contacto de dos círculos o esferas es un ángulo de contingencia; y que este ángulo puede ser dividido por una recta eg . De hecho, tenemos el triángulo $h g k$, cuya base es $h k$; lo dividimos en partes iguales desde el punto e y lo extendemos hasta g ; queda claro entonces lo que pretendíamos demostrar» (Busard, H. L. L., 2005).

Figura 5. Círculos tangentes externos y ángulo de contingencia.



Fuente: Busard, H. L. L., 2005. Elaboración propia.

En el Renacimiento.

Entre los diversos autores que se dedicaron durante el Renacimiento a la cuestión que aquí nos interesa, destaca por su certeza argumentativa la obra de Gerolamo Cardano (1501 – 1576), médico, astrónomo, matemático, músico, físico y filósofo, gran figura de su tiempo. Entre sus diversas obras, recordamos el *De Subtilitate* (*Sobre la sutileza*), en 21 libros (capítulos), que comienza así:

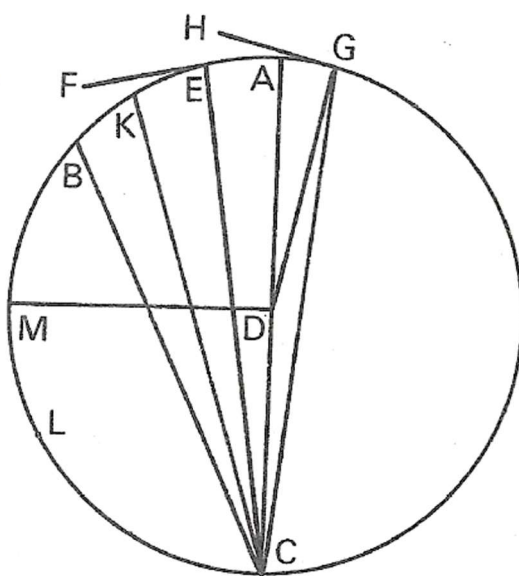
«El objetivo de nuestro trabajo, en esta obra, es abordar la sutileza. La sutileza es una propiedad por la cual las cosas sensibles de los sentidos y las cosas inteligibles del intelecto son difíciles de entender» (Cardano, 1582).

Cardano interviene extensamente en este trabajo sobre magnitudes no arquimedianas. Cuando trata de los “paralogismos” (es decir, demostraciones falsas, secuencias de enunciados que parecen constituir una demostración válida, que, pero son secuencias carentes de lógica), Cardano se expresa de la siguiente manera:

«Un indicio de paralogismo es la demostración de algo falso en la conclusión o en los pasajes intermedios o el descubrimiento de un error que surge de lo que se ha dicho. Pero un paralogismo mayor y más difícil de reconocer puede surgir de forma diferente. Por ejemplo, tomo el círculo ABC [fig. 6] y trazo la recta CDA a través del centro D. Luego dibujo los segmentos CE, CK y CB igualmente distantes entre sí. Ahora dibujo el segmento CG en el otro lado (Cardano, 1582).

Entonces los ángulos CBL, CKL, CEL, CAL son agudos, como se puede demostrar fácilmente. El ángulo CEL es agudo [sigue una prueba compleja]. De modo similar, CAL es agudo, como lo demostró Euclides en el Libro III [proposición 16], y sin embargo mayor que CEL, así como CEL es mayor que CKL y CKL mayor que CBL, lo cual es evidente (...) Entonces, según la opinión común, CBL es menor que CKL y CKL es menor que CEL y CEL es menor que CAL». (Cardano, 1582).

Figura 6. Circunferencia, diámetro, cuerdas y ángulos de contingencia. (Cardano, 1582)



Fuente. Cardano, 1582. Elaboración propia.

Podemos simplemente notar que Cardano no tiene dudas sobre el hecho de que el ángulo de contingencia tiene una magnitud que expresa una medida. En efecto, en aquella época se había desarrollado una controversia sobre este tema; el matemático francés Jacques Peletier (1517 – 1582) (conocido principalmente como poeta clásico y traductor, además de médico) había escrito en 1557 que el ángulo de contingencia debía considerarse como nulo (D'Amore, Sbaragli, 2019).

Peletier argumentó que: si se quita la mitad de una cantidad y se repite la operación con la parte restante, y se repite esta operación, lo que queda es una cantidad menor que cualquier cantidad arbitraria. De este modo llega a la afirmación de que el ángulo de contingencia es menor que cualquier cantidad arbitrariamente pequeña y, por lo tanto, es un ángulo nulo (Peletier, 1557).

Además de Cardano, muchos otros matemáticos, entre ellos Cristóbal Clavius (1538 – 1612) (en 1574), se declararon en contra de la tesis de Peletier.

Siguiendo con el tema de los paralogismos, Cardano propone lo siguiente:

«Tomo dos cantidades, que difieren poco en magnitud, y, sin embargo, aumentando siempre la menor del doble, pero siempre en lo finito, y dividiendo siempre la mayor hasta el infinito, la menor aumentada nunca excederá alguna parte de esta mayor dividida por la mitad» (Cardano, 1582).

Nótese que Cardano admite que una magnitud se puede dividir infinitamente, pero no que se puede aumentar infinitamente, se puede sólo un número finito de veces. Esta cuestión proporciona una visión interesante de la filosofía de la Matemática de la época.

Y creemos que a esta situación se puede atribuir un pasaje de la Física de Aristóteles (-384 – -322) (libro III, par. 8, 206):

«Es evidente, pues, que en cierto sentido el infinito existe, en otro sentido no (...). La magnitud no es infinita en realidad, pero sí es infinita en términos de divisibilidad (...). De ello se deduce que el infinito existe en potencia (...). Incluso con respecto a la adición, el infinito existe en potencia; pero sin embargo no puede ir más allá del tamaño definido del todo, mientras que en la división va más allá de toda determinación y siempre habrá un “más pequeño”». (Aristoteles, 2011).

Evidentemente, Aristóteles se refería a cantidades físicas; de hecho, en otros pasajes de la *Física* (207b, 27-33), Aristóteles admite que el geómetra puede hacer uso de segmentos tan extendidos como quiera.

En este punto, Cardano exhibe una prueba que, según él, explica todo lo anterior de una sola vez. De hecho, consigue “demostrar” constructivamente, utilizando únicamente construcciones admitidas por Euclides, que existen ángulos de contacto entre círculos de cualquier tamaño y ángulos rectilíneos de cualquier tamaño; y que, sin embargo, hay situaciones en las que un ángulo de contingencia, aunque pequeño más allá de toda medida, está contenido en, y por lo tanto es menor que, un ángulo rectilíneo tan pequeño como se desee. Luego afirma que hay varias maneras de demostrar que lo que ha demostrado es un paralogismo; pero un lector difícilmente encontrará una demostración sobre temas de este tipo: de hecho, faltan. (Aristoteles, 2011).

Cardano continúa luego su análisis de los paralogismos obtenidos al razonar sobre ángulos muy sutiles, mezclando ángulos rectilíneos con ángulos mixtilíneos. Es posible, por ejemplo, pasar de un ángulo agudo a uno obtuso, de forma continua, sin obtener, pero, el ángulo recto. Lamentablemente, la “prueba” posterior, según la cual lo anterior es un paralogismo, es completamente incomprensible y lo que se puede deducir de ella mediante el sentido común no es convincente. Cardano probablemente utiliza lo que hoy serían intuiciones sobre lo que un día se llamarán “funciones continuas”.

En particular, Cardano da por sentado que: si un punto móvil A recorre un segmento BC desde B hasta C, habrá un momento en el que A coincidirá con un punto D, comprendido entre B y C. De manera similar, al aumentar el tamaño de un ángulo agudo hasta hacerlo obtuso, con continuidad, para Cardano es obvio admitir que habrá un momento en el que este ángulo sea recto. Sin embargo, además de que todo esto carece de demostraciones rigurosas, sino que se confía únicamente al sentido común del escritor y del lector, los argumentos son más bien confusos (y esto contrasta con la notable claridad de sus otros textos).

Aparte de estas dificultades, que no logra superar, al menos no de la forma rigurosa que sería deseable para los lectores modernos, hay que admitir que Cardano trata, y extensamente, el problema del ángulo de contingencia y de las cantidades no arquimedianas.

Leibniz y el ángulo de contingencia.

La cuestión del ángulo de contingencia en particular y de las cantidades no arquimedianas en general también fue tratada por Isaac Newton (1643 – 1727) (aunque sólo con breves frases escritas aquí y allá en varios textos) y por Godfrey Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

[Leibniz, G. W. *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, escrito por Leibniz en 1714, pero publicado póstumamente; véase: Leibniz (1971)].

Reproducimos las palabras exactas del matemático alemán:

«La evaluación de las magnitudes es doble: imperfecta y perfecta; imperfecta cuando decimos que una cosa es mayor o menor que otra, aunque no sean homogéneas ni tengan proporción entre sí [es decir: no hay múltiplo de la menor que exceda la mayor]; como si alguien dijera que la línea es mayor que el punto o la superficie mayor de la línea. De esta manera, Euclides afirmó que el ángulo de contacto [de contingencia] es menor que cualquier ángulo rectilíneo, aunque en realidad no hay comparación entre estas dos entidades totalmente diferentes, ya que no son homogéneas y no se puede pasar de una a otra con una mutación continua.

En las evaluaciones perfectas entre cantidades homogéneas, se aplica la regla de que, pasando continuamente de un extremo al otro, se pasa por todos los estados intermedios; pero esta regla no se aplica a las evaluaciones imperfectas, porque lo que aquí se llama intermedio es en realidad heterogéneo. Por lo tanto, pasando continuamente de un ángulo agudo dado a un ángulo recto, no se pasa por el ángulo que forma el diámetro o el radio con la circunferencia, aunque se dice que tal ángulo es menor que un ángulo recto y mayor que cualquier ángulo agudo. Aquí se utiliza incorrectamente el término “mayor” por el hecho que una cosa cae dentro de otra». (Leibniz, 1971)

Las tesis de Leibniz constituyen un progreso indudable con respecto a las de los matemáticos vistos anteriormente, en cuanto que prevé la posibilidad de una clase de magnitudes ordenadas para las medidas de las cuales se definen igualdades y desigualdades, mientras que las razones (en el sentido euclidiano) no existen.

Nuestra tesis es que Leibniz parece más cercano a Proclo y Campano que a Cardano; de hecho, no nos parece que Cardano se refiera al carácter no arquimediano de la clase de los ángulos, tanto rectilíneos como mixtilíneos (por tanto: incluidos los ángulos de contingencia).

Los postulados de continuidad y las cantidades no arquimedianas.

Es bien sabido que el postulado de Eudoxo-Arquímedes ha sido estudiado en el contexto de problemas relacionados con la continuidad. Más precisamente, se sabe que: si el postulado de Richard Dedekind (1831 – 1916) es válido, entonces también es válido el postulado de Eudoxo-Arquímedes.

Este postulado de Dedekind (D’Amore, Sbaragli, 2020) puede expresarse de la siguiente manera:

«Sea AB un segmento rectilíneo, dividido en dos partes tales que:

- 1) cada punto de AB pertenece a una de las dos partes, siendo las partes a intersección vacía;
- 2) el extremo A pertenece a la primera parte, el extremo B a la segunda (cada una de las partes no está vacía, ya que la primera contiene al menos A y la segunda al menos B);
- 3) cada punto de la primera parte precede a cualquier punto de la segunda parte (en el orden de A hacia B del segmento mismo);

bajo estas hipótesis, existe un punto C del segmento AB (perteneciente a una o a la otra parte), tal que: todo punto de AB anterior a C pertenece a la primera parte; mientras que todo punto de AB que sigue a C pertenece a la segunda parte».

[¡Al fin, un lenguaje moderno!].

En cambio, es posible construir modelos en los que, si bien el postulado de la continuidad de Georg Cantor (1845 – 1918) es válido, el de Eudoxo-Arquímedes no lo es.

El postulado de Cantor (D’Amore, Sbaragli, 2020) puede expresarse de la siguiente manera:

«Consideremos dos clases de segmentos tales que:

- 1) ningún segmento de la primera clase es mayor que algún segmento de la segunda clase;
 - 2) dado un segmento a por pequeño que sea, existen un segmento de la primera clase y uno de la segunda, cuya diferencia es menor que a ;
- en tales hipótesis, existe un segmento que no es ni más pequeño que cualquier segmento de la primera clase, ni más grande que cualquier segmento de la segunda».

Por lo tanto, si una clase de cantidades está sujeta al postulado de Dedekind, es necesariamente arquimediana.

Sin embargo, hay ejemplos de clases de cantidades que son cantorianas, pero no arquimedianas, como el modelo de geometría de Giuseppe Veronese (1854 – 1917), que aquí pasaremos por alto, haciendo referencia al cuarto capítulo del texto de Ettore Carruccio (1908 – 1980) (Carruccio, 1971).

Utilizando la primera ley de inversas, observamos, incidentalmente, que las clases de magnitudes no arquimedianas también son no dedekindianas.

En el texto recién citado se dan ejemplos de magnitudes no arquimedianas.

Las relaciones que acabamos de mencionar han resuelto definitivamente el problema del ángulo de contingencia y de las cantidades no arquimedianas, tanto en relación con la cuestión de la definición de razón y de orden, como con la cuestión de la continuidad.

Pero para tener rigor en los aspectos aritméticos de todo lo anterior, Tullio Levi-Civita (1873 – 1941) tuvo que idear los llamados números no arquimedianos. Más de 2000 años de historia ... (Levi Civita, 1954 – 1973).

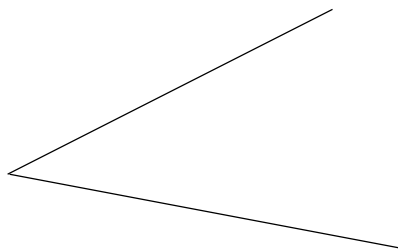
Algunas consideraciones didácticas finales.

Un profesor de Matemática explica temas matemáticos a sus alumnos con profesionalismo y competencia; lo hace con seriedad, atención, disponibilidad. Pero luego, en los días siguientes, se da cuenta de que más de un alumno no ha hecho suyos los temas de sus clases. ¿Su impericia? ¿No hay disponibilidad de los estudiantes? ¿Excesiva dificultad del tema tratado? Quizás todas estas cosas al mismo tiempo.

Al preparar sus clases y sobre todo al imaginar las posibles dificultades de aprendizaje de sus alumnos, en nuestra opinión el profesor debe aprender también a evaluar los temas que pretende proponer desde un punto de vista epistemológico, histórico-crítico, no para transmitir estas ideas a los alumnos, sino para tener un criterio científico serio personal del tema. Un tema que parece tan banal como el ángulo, su amplitud, la medida de esa amplitud, la posibilidad de insertar ángulos uno dentro de otro, ..., tiene una historia increíblemente compleja desde el punto de vista matemático. ¡La definición misma de ángulo necesitó dos milenios!

Consideremos la siguiente figura 7.

Figura 7. Ángulo entre dos semirrectas.

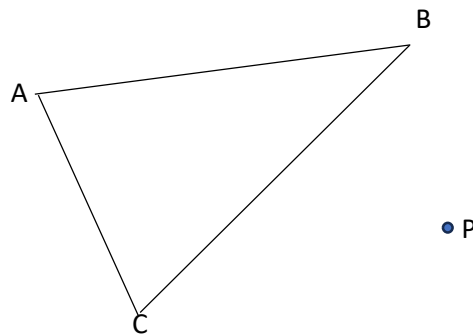


Fuente. Elaboración propia.

Encontramos escrito: «ángulo entre dos semirrectas». ¿El ángulo también incluye el vértice o no? ¿Incluye las dos semirrectas o no? Se lee: «El ángulo es la parte del plano comprendida entre las dos semirrectas». Pero: ¿las dos semirrectas son parte del ángulo o no? Si es así, un ángulo completo es un plano; si no, el ángulo completo es un plano excepto una línea recta. Si es así, un ángulo nulo es una semirrecta; en caso contrario, el ángulo nulo es un conjunto vacío.

Consideramos la siguiente figura 8.

Figura 8. Ángulos internos de un triángulo.

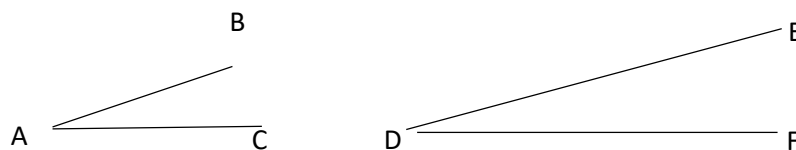


Fuente. Elaboración propia.

Se dice comúnmente que $\hat{BAC}$ es un ángulo interno del triángulo ABC. ¿El punto P pertenece al ángulo $\hat{BAC}$ o no? Casi todos los estudiantes responden negativamente porque no consideran las semirrectas AB y AC, sino los segmentos.

Consideremos la siguiente figura 9 en la cual los puntos A, C, D, F pertenecen a una misma recta mientras que las rectas AB y DE son paralelas.

Figura 9. AC y DF son la misma recta; las rectas AB y DE son paralelas.



Fuente. Elaboración propia.

Si se le pregunta a un estudiante cuál de los dos ángulos es mayor, se tendrá la sorpresa de escuchar la respuesta que el ángulo EDF es mayor, como si AB, AC, DE, DF no fueran semirrectas.

En cuanto a la idea de amplitud, a los seres humanos les llevó milenios para definirla de manera significativa.

Y luego está el problema de la enorme confusión terminológica; palabras como cantidad, magnitud, razón, medida, como hemos visto en las páginas anteriores, han sido utilizadas a menudo desde el siglo -IV hasta hace un siglo y medio de forma confusa, mezcladas entre sí. Sólo la crítica matemática actual, de los últimos 150 años, ha hecho un esfuerzo increíble para hacer claridad.

Ahora bien, aunque nosotros los profesores, en clase, seamos correctos, precisos y enseñemos a nuestros alumnos a ser críticos y cautelosos, podemos, debemos esperarnos todo tipo de dificultades y malentendidos.

Invitamos pues a los profesores de Matemática a tomar posesión, desde un punto de vista histórico, por tanto, también epistemológico, de los diversos temas, incluso los aparentemente más simples, para intentar prever, intuir, aceptar las inevitables dificultades de nuestros estudiantes.

Este texto no pretende ser más que un ejemplo, entre mil posibles, de este tipo de estudio.

Referencias bibliográficas.

- Aristoteles (2011), *Fisica*, Milano: Bompiani. [Editor Roberto Radice].
- Barbin, É. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'association mathématique du Québec*, 37(1), 20-25.
- Busard, H.L.L. (2005). *Campanus of Novara and Euclid's Elements*. 2 vols. Stuttgart, Germany: Steiner, 2005.
- Cardano, G. (1582). *De Subtilitate libri XXI*. Basilea: S. Henricpetri.
- Carruccio, E. (1971). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, a cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora.
- Chorlay, R., Clarke, R., Tzanakis, C. (2022). History of Mathematics in Mathematics Education: recent development in the field. *ZDM – Mathematics Education*.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2012). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B. (2016). Función de la epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria. En: Costas dos Santos, M. J., Costa Matos, F. C., Bezerra Magalhães, E. B. (Eds.) (2016). *As dimensões epistemológicas do saber matemático: ensino e aprendizagem*. Curitiba (Brasil): Editora CRV. 9-48.
- D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Nicosia G.G. y Santi, G. (2025). *Los números. Matemática, historia, juegos y curiosidades, para una enseñanza correcta y eficaz*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2011). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia*. Vol. II. *Dal tramonto greco al Medioevo*. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III. *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.
- Euclides (2009). *Os elementos* (Tradução e introdução de Irineu Bicudo). São Paulo: Editora UNESP.
- Fandiño Pinilla, M.I. (2013). Para una buena didáctica (de la matemática) es necesario un buen Saber (matemático). *UNO*, 19(64), 68-76.
- Fandiño Pinilla, M.I. (2020). Storia della matematica in aula e ostacoli epistemologici. En: B. D'Amore, S. Sbaragli (Eds.) (2020), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace. Atti del XXXIV Convegno Nazionale Incontri con la matematica*, Castel San Pietro, 6-8 novembre 2020. Bologna: Pitagora.

- Fandiño Pinilla, M.I., D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Fandiño Pinilla, M.I., D'Amore, B. (2023). Reflexiones histórico-críticas y didácticas sobre la idea de ángulo. *Paradigma*, 44(2), 297-315.
- Fandiño Pinilla, M.I., D'Amore, B. (2024). *Historia de la Educación Matemática como disciplina científica*. Bogotá: Magisterio.
- Furinghetti, F., Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in school*, 27(4), 48-51.
- Leibniz, G.W. (1971) *Initia Rerum mathematicarum metaphysica*. En *Mathematische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*. VII. Hildesheim y Nueva York: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, pp. 17-29.
- Levi Civita, T. (1954 – 1973). *Opere matematiche. Memorie e note*. Bologna: Zanichelli
- Nataraj, M.S., Thomas, M.O.J. (2009). Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Math and Res*, J 21, 96-115.
- Peletier, J. (1557). In *Euclidis Elementa geometrica demonstrationum*. Jean de Tournes, Guillaume Gazeau.
- Proclo Diadoco (1873). *Procli Diadochi in primum Euclides elementorum librum commentarii*. Lipsia: Ed. G. Friedlein.
- Radford, L., Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7), 1479-1492.
- Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. En: D. Scott, E. Hargreaves (Eds.), *The Sage Handbook of Learning* (pp. 129 - 138). London: Sage.